Primetimo da za $p \in (0,1)$ norma $\|\cdot\|_p$ ne bi bila dobro definisana jer ne bi zadovoljavala nejednakost trougla.

Propozicija 8.1. U prostoru $L^p(X)$ važe:

a) Helderova nejednakost

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \; f \in L^p(X), g \in L^q(X),$$

gde je $p > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

b) Koši–Švarcova nejednakost

$$|\int_X fg d\mu| \leq \|f\|_2 \|g\|_2, \; f, g \in L^2(X).$$

c) Nejednakost Minkovskog

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \; f, g \in L^p(X),$$

gde je $p > 1$.

Napomena. Brojevi p i q koji se pominju u Helderovoj nejednakosti nazivaju se *konjugovani indeksi.* Treba primetiti da je $p = 2$ sam sebi konjugovani indeks.

Dokaz: a) Neka je $\alpha \in (0,1)$. Posmatrajmo preslikavanje φ definisano sa

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha, \; \text{za } t \geq 0.$$

Tada je $\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha(1 - t^{\alpha-1})$. Odavde se lako vidi da je $\varphi'(t) < 0$ za $0 < t < 1$, $\varphi'(t) > 0$ za $t > 1$. To znači da je funkcija φ opadajuća za $0 < t < 1$, rastuća za $t > 1$, a minimum dostiže u $t = 1$. Otuda $\varphi(t) \geq \varphi(1)$, za svako $t \geq 0$, odnosno

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha), \; \text{za svako } t \geq 0.$$

Ako su a i b ($b \neq 0$) nenegativni brojevi takvi da je $t = \frac{a}{b}$ onda važi:

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b$$

(jednakost važi ako i samo ako je $a = b$).
Kako po uslovu teoreme važi $p > 1$ onda je $\frac{1}{p} < 1$, pa možemo uzeti da je $\alpha = \frac{1}{p}$. Tada je $1 - \alpha = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. Ako još stavimo

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}, \; b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}, \quad (a, b \geq 0)$$

i zamenimo u poslednju nejednakost, dobijamo

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}.$$